Мы приступаем к гамильтонову формализму! Намного более понятному и близкому нам.
Функция Гамильтона H зависит только от обобщённых координат и обобщённых импульсов:

$$H(q_1, q_2, q_3, \dots, p_1, p_2, p_3)$$

Этим она отличается от Лагранжиана, который зависит только от координат и их производных (в курсе теормеха – только первых производны по времени):

$$L(q_1, q_2, q_3, \dots, \dot{q_1}, \dot{q_2}, \dot{q_3})$$

И та, и та другая функция, таким образом, является функцией 2N переменных, где N – число переменных. Ой, ещё в исключительных случаях лагранжиан и гамильтониан могут явно зависеть от времени:

$$H(q_1, q_2, q_3, \dots, p_1, p_2, p_3, t)$$
$$L(q_1, q_2, q_3, \dots, \dot{q_1}, \dot{q_2}, \dot{q_3}, t)$$

Более важным отличием гамильтониана от лагранжиана является то, что если L=T-U, то H=T+U. И эта причина, почему гамильтонов формализм нам гораздо более приятен ☺ Разность кинетической и потенциальной энергий не имеет физического смысла, а вот сумма – имеет, и ещё какой ☺

Если в лагражневом формализме для нахождения закона движения частицы с N степенями свободы решалось N ДУ-второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

То в гамильтоновом формализме для нахождения закона движения требуется решить 2N ДУ, но уже лишь первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{q_k} = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p_k} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases}$$

Эта система из 2N уравнений называется уравнениями Гамильтона.

Что легче – решить N ДУ второго порядка или 2N ДУ первого порядка? В большинстве случаев это по сложности одно и то же.

Пример. $H=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\frac{p_z^2}{2m}+U(x,y,z,t)$ – обычное движение в потенциале. Тогда запишем для такого гамильтониана уравнения Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{q_k}=\frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p_k}=-\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases}$$

т.е.

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p_x}=\frac{p_x}{m}$$

$$\dot{p_x}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial x}$$

И аналогично для y и z. Что мы получили? В первой строчке хорошо знакомую формулу $m\dot{x}=p_x$, во второй – второй закон Ньютона $\dot{p_x}=F_x$, где проекция силы есть минус производная потенциала по координате: $-\frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial x}$. Очень логично! Таким образом, гамильтонов формализм – это естественное обобщение ньютоновской механики. Только, в отличие Ньютона, она может работать и тогда, когда в роли обобщённых координат не x,y,z, а цилиндрические и сферические координаты.

Таким образом, у уравнений Гамильтона ясный физический смысл: первое $\dot{q_k}=\frac{\partial H}{\partial p_k}$ связывает обобщённую скорость с обобщённым импульсом (обобщение p=mv), а второе $\dot{p_k}=-\frac{\partial H}{\partial q_k}$ – помогает выразить производные импульсов по времени через обобщённую силу. Кстати, это поможет вам запомнить, в каком из уравнений Гамильтона знак минус. Студенты часто путаются: так

$$\begin{cases} \dot{q_k}=\frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p_k}=-\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases} \text{или} \begin{cases} \dot{q_k}=-\frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p_k}=\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases}$$

Вспоминаем: сила есть МИНУС градиент потенциала, т.е. минус должен стоять при производной H по координате, т.е. $-\frac{\partial H}{\partial q_k}$. Значит, слева написано верно.

Зачем нужен гамильтонов формализм, если есть лагранжев?

Преподаватели отвечают так: потому что гамильтонов формализм позволяет увидеть те интегралы движения, которые невозможно увидеть в лагранжевом.

И это тоже! Но на самом деле возможности гамильтонова формализма гораздо шире. Например, он активно применяется в той же статистической физике (будет у вас на 4 курсе). Действительно, систему N взаимодействующих (например, попарно) частиц можно описать гамильтонианом:

$$H(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{r_1}, \dots, \boldsymbol{p_N}, \boldsymbol{r_N}) = \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k^2}{2m} + \sum_{\text{по всем парам}} U(\boldsymbol{r_i}, \boldsymbol{r_j})$$

И этот гамильтониан буде стоять в распределении Гиббса:
Вероятность того, что у частиц будут импульсы и радиус-вектора $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{r_1}, \dots, \boldsymbol{p_N}, \boldsymbol{r_N}$, пропорциональна exp $\left(-\frac{H(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{r_1}, \dots, \boldsymbol{p_N}, \boldsymbol{r_N})}{\theta}\right)$ (напомню, что θ=kT).
Применяется активно гамильтониан и в квантовой механике – да чего уж там, роль квантового гамильтониана $\widehat{H}$ сложно переоценить.
Любознательные также могут почитать про теорему Лиувилля https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Лиувилля_о_сохранении_фазового_объёма , где также используется гамильтонов формализм.

Зачем нужен лагранжев формализм, если есть гамильтонов?
На этот вопрос семинаристы не отвечают. Немудрено: лагранжев формализм лёг в основу современной теорфизики. А т.к. курс читают преподаватели с кафедры теорфиза, то для них усомниться в нужности лагранжева формализма невозможно.
Другое дело, что в других разделах физики лагранжев формализм не нужен. Ну, что ж поделать.

А как найти гамильтониан
Хорошо, если нам дан гамильтониан

$$H(q_1, q_2, q_3, \dots, p_1, p_2, p_3, t)$$

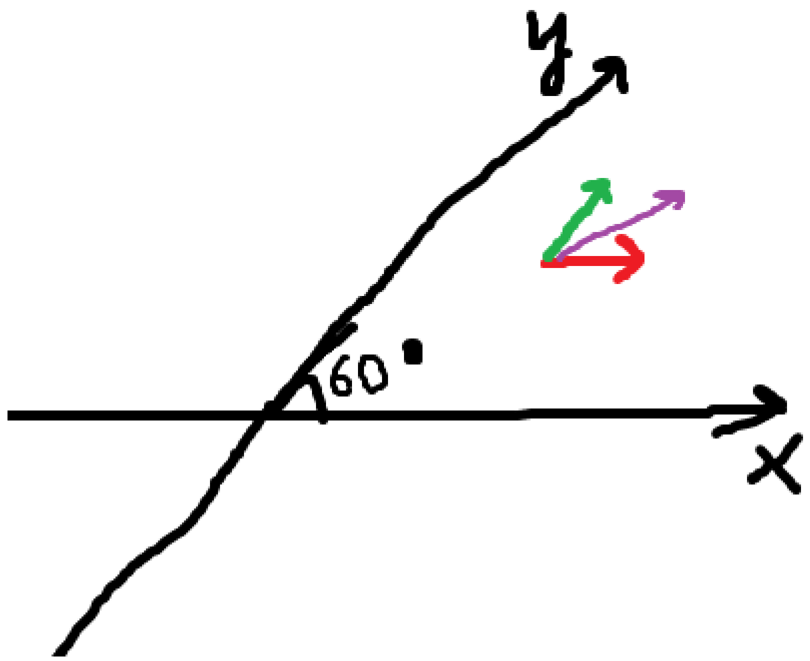
мы можем записать уравнения Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases}$$

и решить задачу.
А как записать гамильтониан? Казалось бы, всё просто: H=T+U. Но есть нюанс! 

. И этот нюанс мы поймём на примере.

Пример: Рассмотрим частицу на плоскости и возьмём неортогональные координаты. Например, такие:



Попытаемся записать квадрат скорости через $\dot{x}$ и $\dot{y}$.

Красная стрелочка - $\dot{x}$. Зелёная - $\dot{y}$. Квадрат их суммы, фиолетовой стрелочки, по теореме косинусов

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\cos 120^\circ$$

Получаем вот такой вот лагранжиан (считаем, что потенциальная энергия везде 0):

$$L = W_k = (\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + y^2)\frac{m}{2}$$

А что насчёт H?

НЕПРАВИЛЬНЫЙ ПОДХОД:

Да чего долго думать, выражаем обобщённые импульсы через скорости по формуле из 9 класса $p_x = m\dot{x}$, после чего подставляем и получаем H (она у нас $W_к + W_п$, но т.к. потенциальной энергии нет, просто $W_к$).

$p_x = m\dot{x},\ p_y = m\dot{y}$, откуда $H = W_k = \dfrac{p_x^2 + p_x p_y + p_y^2}{2m}$.

Такой тяп-ляпистый подход приводит к неправильному ответу.

И основная проблема в том, что неверно найдены обобщённые импульсы. Оказывается, что обобщённый импульс может быть не равен импульсу простому (!)

Так как же поступать?

Способ, работающий в 100% случаев: преобразование Лежандра

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) \equiv \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}\Big|_{\dot{q}_i = \dot{q}_i(q,p,t)}$$

Оно состоит из двух частей:

1) а) Мы сначала выражаем обобщённые импульсы через производные L по скоростям

б) затем выражаем эти скорости через импульсы

2) Считаем ту сумму.

Способ требует нахождения лагранжиана, очевидно. На самом деле нам нужен не столько он, сколько его часть со скоростями, т.е. кинетическая энергия.

В части 1, которая обязательна к выполнению, мы берём кинетическую энергию через обобщённые скорости:

$$W_k = (\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + y^2)\frac{m}{2}$$

а) Сначала выражаем обобщённые импульсы через скорости по формулам, которые РАБОТАЮТ, в отличие от $p_x = m\dot{x},\ p_y = m\dot{y}$:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$$

$$\dot{p}_x = (2\dot{x} + \dot{y})\frac{m}{2}$$

$$\dot{p}_y = (2\dot{y} + \dot{x})\frac{m}{2}$$

б) Затем – решение этой СЛАУ и нахождение уже скоростей через импульсы:

$$2\dot{p}_x/m = 2\dot{x} + \dot{y}$$

$$2\dot{p}_y/m = 2\dot{y} + \dot{x}$$

$$\frac{2}{3m}(p_x + p_y) = \dot{x} + \dot{y}$$

$$\dot{x} = \frac{2}{3m}(2p_x - p_y)$$

$$\dot{y} = \frac{2}{3m}(2p_y - p_x)$$

Это была первая часть преобразования Лежандра.

Далее нам предстоит вторая часть, но тут можно действовать по-разному.

Начнём с традиционного способа, о котором рассказывают все семинаристы:

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) \equiv \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}\Big|_{\dot{q}_i = \dot{q}_i(q,p,t)}$$

. Этот способ работает в 100% случаев:

$$\dot{x}p_x + \dot{y}p_y - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}\dot{y})\frac{m}{2} =$$

$$\frac{2}{3m}(2p_x^2 - p_x p_y - p_x p_y + 2p_y^2) - \frac{2m}{9}\left((2p_x - p_y)^2 + (2p_y - p_x)^2 + (2p_x - p_y)(2p_y - p_x)\right) =$$

$$= \frac{4}{3m}(p_x^2 + p_y^2 - p_x p_y) - \frac{2m}{9}(5p_x^2 + 5p_y^2 - 8p_x p_y + 5p_x p_y - 2p_x^2 - 2p_y^2) =$$

$$= \frac{4}{3m}(p_x^2 + p_y^2 - p_x p_y) - \frac{2}{3m}(p_x^2 + p_y^2 - p_x p_y) = \frac{2}{3m}(p_x^2 + p_y^2 - p_x p_y)$$

Сравним с неправильным результатом:

$$H = W_k = \frac{p_x^2 + p_x p_y + p_y^2}{2m}$$

Вот то-то и оно.

Можно ли иначе?

Можно. Способ №2: подстановка в L $\dot{x}$ и $\dot{y}$., выраженных через импульсы. После этого меняете знак у потенциальной энергии, а слагаемые, линейные по производным, просто удаляются.
Этот способ активно продвигает на своих семинарах Степаньянц, поэтому я этот способ называю правилом Степаньянца.
В нашей задаче

$$\frac{m}{2}\left(\frac{2}{3m}\right)^2\left((2p_x - p_y)^2 + (2p_x - p_y)(2p_y - p_x)^2 + (2p_y - p_x)^2\right) = \frac{2}{9m}\cdot$$

$$\cdot(4p_x^2 - 4p_x p_y + p_y^2 + 5p_x p_y - 2p_y^2 - 2p_x^2 + 4p_y^2 - 4p_x p_y + p_x^2) =$$

$$= \frac{2}{9m}(3p_x^2 + 3p_y^2 - 3p_x p_y) = \frac{2}{3m}(p_x^2 + p_y^2 - p_x p_y)$$

Способ №3. Подсчитать $\frac{1}{2}(\dot{x}p_x + \dot{y}p_y)$. Это будет кинетическая энергия. После к ней добавляете потенциальную энергию. Слагаемые из лагранжиана, линейные по производным, также выкидываете.

Вообще, эти три способа взаимосвязаны ☺ Взгляните на способ 1:

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) \equiv \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}\Big|_{\dot{q}_i = \dot{q}_i(q,p,t)}$$

. Уменьшаемое, согласно способу 3, это удвоенная кинетическая энергия, а вычитаемое L=T-U. Тогда получаем H=2T-(T-U)=T+U. Ч.т.д. ☺

Как правило, способ 3 является самым быстрым, способ 2 помедленнее, способ 1 самый долгий. Так почему же все так пиарят способ 1? Потому что способ 1 не требует использования правила Степаньянца, про то, что у слагаемых, где нет точек (т.е. потенциальной энергии) поменять знак, а у одночленов, где одна точка, поменять знак.
Если вы в этом правиле шарите (а оно не сложное) – можете использовать способы 2 или 3.

Но перед этим ***обязательно корректно подсчитайте импульсы***! Первая часть преобразования Лежандра обязательна – вы должны выразить производные координат через импульсы, которые вы считаете НЕ по формуле $P_q = m\dot{q}$, а по формуле $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$. Да, согласен,

$P_q = m\dot{q}$ выглядит красиво, однако это далеко не всегда так. (К тому же такой подход иногда приводит даже к ошибкам в размерности. Например, хочется написать

$p_\varphi = m\dot{\varphi}$.

Только левая часть имеет размерность момента импульса, а правая – кг/с). Поэтому считайте обобщённые импульсы честно через преобразование Лежандра. Схалтурить можно во второй его части, когда вы уже непосредственно будете считать гамильтониан.

На всякий случай скажу про обратную задачу – от гамильтониана к лагранжиану. Например, нам дан нерелятивистской частицы в э/м поле:

$$H = \frac{\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r})\right)^2}{2m} + e\varphi(\vec{r})$$

(я не буду решать задачу, просто для примера)

Как найти лагранжиан?

Аналогично из двух частей состоит решение: на этот раз нужно выразить уже обобщенные скорости через обобщённые импульсы по формуле

$$\dot{q_k} = -\frac{\partial H}{\partial \dot{p_k}}$$

Это просто одно из уравнений гамильтониана.

Ну а далее обратное преобразование Лежандра:

$$L = \sum_{k=1}^{N} \dot{q_k}\, p_k - H$$

Конечная табличка:

$L \to H$	$H \to L$
Шаг 1 $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}}$	Шаг 1 $\dot{q_k} = -\frac{\partial H}{\partial \dot{p_k}}$
Шаг 2 $H = \sum_{k=1}^{N} \dot{q_k}\, p_k - L$	Шаг 2 $L = \sum_{k=1}^{N} \dot{q_k}\, p_k - H$